或る関数空間における線形等長作用素と合成作用素について(線形作用素に関連する不等式とその周辺)

AUTHOR(S):

松本, 敏子; 渡辺, 誠治

数理解析研究所講究録
第 860 巻 1994 年 19-31

或る関数空間における
線形等長作用素と合成作用素について

新潟大 自然科学 松本 敏子 (Tosiko Matumoto)
新潟大 理 渡辺 誠治 (Seiji Watanabe)

§1. 序

可換 C^*-環における非有界閉 $*$-微分は、きわめて重要であり、かつ興味深いものである。また、$C^{(1)}([0,1])$ で考える d/dt は、非有界閉 $*$-微分であるから、単位元をもつ可換 C^*-環 $C(K)$ (K:コンパクト ハウスドルフ空間) の非有界閉 $*$-微分 δ の定義域 $\mathcal{D}(\delta)$ は、$C^{(1)}([0,1])$ の バナッハ空間としての ひとつの一般化とみなせる。よって、$\mathcal{D}(\delta)$ を調べることで、$C^{(1)}([0,1])$ のバナッハ空間としての性質が、d/dt のどんな性質から得られるものなのか、解析できる。また、$\mathcal{D}(\delta) = C(K)$ ならば、$\delta \equiv 0$ であるので、$C(K)$ は、$\mathcal{D}(\delta)$ の特別な場合と考えられることから、$\mathcal{D}(\delta)$ を調べることで、$C(K)$ と $C^{(1)}([0,1])$ とその他の微分可能な関数による空間をひとまとめにして扱うことを目指す。非有界閉 $*$-微分の 定義域 $\mathcal{D}(\delta)$ については、いろいろ調べられている。例えば、1 は $\mathcal{D}(\delta)$ に自動的に含まれてしまうし、また、$\mathcal{D}(\delta)$ では $C^{(1)}$-functional calculus ができる。非可環 C^*-環では $C^{(1)}$-functional calculus はできないことが A. McIntosh により示されている ([16])。$\mathcal{D}(\delta)$ は、後で述べる c-ノルムや Σ-ノルムや δ-ノルムにより可環バナッハ環になり、さらに、境 [21] によ

りシロウ部分環 (即ち、$\mathcal{D}(\delta)$ の maximal ideal space が K で、点と閉集合を分離する元が $\mathcal{D}(\delta)$ からとれる) になることも、知られている。他にも、Batty[1,2] や Goodman[9] や 富山 [25] 等によりバナッハ環としての興味深い結果が得られている。非可換の場合も含めて、C^*-環の 非有界 $*$-微分については、[3,4,5,13,14,18,21,22] を参照してください。

一方、よく知られた Banach-Stone の定理 [8] は、$C(K)$ からそれ自身の上への線形等長作用素が、K からそれ自身への同相写像によって誘導されることを述べている。更に、$C^{(1)}([0,1])$ からそれ自身の上への線等長作用素についても、調べられている。まず、Cambern [6] が c-ノルムで 次の結果を得た。$C^{(1)}([0,1])$ での ノルムを

$$\|f\|_c = \sup\{|f(x)| + |f'(x)| : x \in [0,1]\} \qquad (f \in C^{(1)}([0,1]))$$

とし、T を $C^{(1)}([0,1])$ から それ自身の上への 線形等長作用素 とすると、任意の $f \in C^{(1)}([0,1])$ と $x \in [0,1]$ に対して

$$T(f)(x) = e^{i\theta} f(\tau(x))$$

で 表せることがわかる。ただし、$e^{i\theta} = T(1)$ $(\theta \in (-\pi, \pi])$(定数) であり、$\tau = id$ または $\tau = 1 - id$ $(id(x) = x : x \in [0,1])$ である。その後、 Σ-ノルムで Rao-Roy [19] が調べた。最近では、Jarosz-Pathak [10] が、たくさんの古典的なよく知られている空間上のそれ自身の上への線形等長作用素の研究に一般的な設定を与えた。

ここでは、$C(K)$, $C^{(1)}([0,1])$ の一般化として M-ノルムをもつ バナッハ空間 $\mathcal{D}(\delta)$ の線形等長作用素について考える。また、最近 研究が活発に行われている合成作用

素のコンパクト性についても、併せて議論する。さらに、詳しい $\mathcal{D}(\delta)$ の性質を知るには、非有界閉 $*$-微分 δ 自身の詳しい研究が必要と思われる。

§2. 準備

まず，非有界閉 $*$-微分の定義と その定義域でのノルムと、後で用いる3つの命題を述べておく。

定義 K をコンパクト ハウスドルフ空間とする。$C(K)$ は K 上で定義された複素数値連続関数全体とし、supremum ノルム で考える。$C(K)$ 上の線形写像 δ が次の条件を満たす時、δ を微分と呼ぶ。

(1) δ の 定義域 $\mathcal{D}(\delta)$ が、$C(K)$ の稠密な部分環となる。

(2) $\delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g)$ $(f, g \in \mathcal{D}(\delta))$.

微分 δ が次の条件を満たす時、δ を $*$-微分と呼ぶ。

(3) $f \in \mathcal{D}(\delta)$ ならば、$f^* \in \mathcal{D}(\delta)$ で $\delta(f^*) = \delta(f)^*$. (ただし、$f^*$ は f の複素共役とする。)

また、微分 δ が次の条件を満たす時、δ を閉微分と呼ぶ。

(4) $f_n \in \mathcal{D}(\delta)$ で、f_n が f に収束し $\delta(f_n)$ が g に収束すれば、$f \in \mathcal{D}(\delta)$ で $\delta(f) = g$. (すなわち、作用素として 閉。)

例

- $C([0,1])$ における微分 d/dt は 非有界閉 $*$-微分である。
- Φ を定数でない 一般化されたカントール関数 (GCF) とし、$C^*(1, \Phi)$ を Φ と 1 によって 生成される $C([0,1])$ の C^*-部分環とする。$f \in C^{(1)}([0,1])$ と $g \in C^*(1, \Phi)$

に対し、$\delta(f+g) := (d/dt)f$ で定義すると、δ は d/dt の拡張である $C([0,1])$ における非有界閉 $*$-微分であり、$\mathcal{D}(\delta) = C^{(1)}([0,1]) + Ker(\delta)$ である。逆に、δ を d/dt の拡張である $C([0,1])$ における非有界閉 $*$-微分とすると、$Ker(\delta) = C^{*}(1,\Phi)$ となる Φ (GCF) が存在して、$\mathcal{D}(\delta) = C^{(1)}([0,1]) + Ker(\delta)$ である ([22])。

• $C([0,1] \times K)$ (K : コンパクト ハウスドルフ) における偏微分は、非有界閉 $*$-微分である。

非有界閉 $*$-微分の定義域 $\mathcal{D}(\delta)$ は、次の 3 つのノルムを考えると、バナッハ環になる。

(c-ノルム) $$\|f\|_c := \sup\{|f(x)| + |\delta(f)(x)| : x \in K\} \qquad (f \in \mathcal{D}(\delta))$$

(Σ-ノルム) $$\|f\|_\Sigma := \|f\|_\infty + \|\delta(f)\|_\infty \qquad (f \in \mathcal{D}(\delta))$$

ただし、$\|f\|_\infty$ は、$C(K)$ の supremum ノルム とする。

(δ-ノルム) $$\|f\|_\delta := \sup_{t \in K} \left\| \begin{pmatrix} f(t) & \delta(f)(t) \\ 0 & f(t) \end{pmatrix} \right\| \qquad (f \in \mathcal{D}(\delta))$$

また、

(M-ノルム) $$\|f\|_M := \max(\ \|f\|_\infty, \|\delta(f)\|_\infty) \qquad (f \in \mathcal{D}(\delta))$$

で 与えると、$\mathcal{D}(\delta)$ は、バナッハ空間である。これらのノルムは、すべて同値である。

$$\|f\|_M \le \|f\|_\delta \le 2\|f\|_c \le 2\|f\|_\Sigma \le 4\|f\|_M$$

次に、後で用いる 3 つの命題を述べる ([22])。

命題 1. K を コンパクト ハウスドルフ空間とし、δ を $C(K)$ の非有界閉 $*$-微分とすると、$f(=f^*)\in\mathcal{D}(\delta)$ と $h\in C^{(1)}([-\|f\|_\infty,\|f\|_\infty])$ に対して、$h(f)\in\mathcal{D}(\delta)$ で $\delta(h(f))=h'(f)\delta(f)$.

命題 2. K をコンパクト ハウスドルフ空間とし、δ を $C(K)$ の 非有界閉 $*$-微分とする。もし、$f\in\mathcal{D}(\delta)$ が $x\in K$ の近傍で定数ならば、$\delta(f)(x)=0$.

命題 3. K をコンパクト ハウスドルフ空間、δ を $C(K)$ の非有界閉 $*$-微分とし、J_1 と J_2 を K の互いに素な閉部分集合とすると、J_1 で $f=0$ 、J_2 で $f=1$ であり、$0\le f\le 1$ であるような $f\in\mathcal{D}(\delta)$ が存在する。

ここで、記号の説明をする。バナッハ空間 B に 対し、共役空間を B^*、 閉単位球を B_1、その端点全体を $extB_1$ とする。また、非有界閉 $*$-微分 δ の核を $Ker(\delta)$ とし、値域を $\mathcal{R}(\delta)$ とする。

以下、$\mathcal{D}(\delta)$ で扱うノルムは、

$$\|f\|_M=\max(\|f\|_\infty,\|\delta(f)\|_\infty)$$

とする。

§3. 非有界 $*$-微分の定義域の単位球における端点

多くの具体的バナッハ空間の閉単位球の端点が、既に調べられている。

K をコンパクト ハウスドルフ空間とし、δ を $C(K)$ の 非有界閉 $*$-微分とする。f が $\mathcal{D}(\delta)_1$ の端点であれば、$\|f\|_\infty=1$ である。また、$f\in\mathcal{D}(\delta)_1$ で、 すべての

$x \in K$ に対し $|f(x)| = 1$ ならば、f は $C(K)$ の端点であるので $\mathcal{D}(\delta)_1$ の端点である。$ext\mathcal{D}(\delta)_1$ の元の特徴付けとして、次の定理を得た。

定理 1. $Ker(\delta)=\mathbb{C}1$ を 仮定する。f が $\mathcal{D}(\delta)_1$ における端点となる必要十分条件は、

$$\|f\|_M = \|f\|_\infty = 1, \quad |\delta(f)(x)| = 1 \quad (x \in K\backslash M_f)$$

である。ただし、

$$M_f = \{x \in K : |f(x)| = 1 (= \|f\|_\infty)\}$$

とする。

注 '必要条件' の部分の証明に、δ の核を $\mathbb{C}1$ とする条件は、不要である。

端点の例をあげる。

例 K をコンパクトハウスドルフ空間、δ を $C(K)$ における 非有界閉 $*$-微分とする。$\|\delta(f)\|_\infty \leq 1$ である任意の $f(=f^*) \in \mathcal{D}(\delta)$ に対して、絶対値が常に 1 で $\|h'\|_\infty \leq 1$ である $h \in C^{(1)}([-\|f\|, \|f\|])$ が存在する。$h(f)$ は、$\|h(f)\|_M = \|h(f)\|_\infty = 1$ であり、絶対値が常に 1 である。よって、$h(f)$ は、$\mathcal{D}(\delta)_1$ の端点である。

例 K を連結なコンパクトハウスドルフ空間、δ を $C(K)$ における非有界閉 $*$-微分で $\mathcal{R}(\delta) = C(K)$ であるとすると、次の 3 つの条件を満たす $f(=f^*) \in \mathcal{D}(\delta)$ と $h \in C^{(1)}([-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty])$ が存在する。(i). $\|h(f)\|_\infty = 1$. (ii). $|h(f)(x)| < 1$ である $x \in K$ が存在. (iii). $|\delta(h(f))| \equiv 1$. $h(f)$ は、$\mathcal{D}(\delta)$ の元で $\|h(f)\|_M = 1$ であり、定理 1 の条件を満たす。よって、$Ker(\delta) = \mathbb{C}1$ ならば、$h(f)$ は $\mathcal{D}(\delta)_1$ の端点である。

命題 2． $K=I\cup J$ (I, J は、互いに素な 実数 $\mathbb{R}$ の閉区間) とし、δ を、$C(K)$ における 閉$*$-微分とする。$Ker(\delta)$ を、I と J で定数である関数全体と仮定する。$f\in\mathcal{D}(\delta)$ は、$\|f\|_M=\|f\|_\infty=1$ であり、絶対値が 1 とならない $x\in K$ が 存在すると仮定すると、$f\in ext\mathcal{D}(\delta)_1$ である必要十分条件は、$|\delta(f)(x)|=1$ $(x\in K\backslash M_f)$, $I\cap M_f\neq\phi$, $J\cap M_f\neq\phi$ である。(ただし、$M_f=\{x\in K:|f(x)|=1(=\|f\|_\infty)\}$.)

§4. 非有界 $*$-微分の定義域の共役空間の単位球における端点

Krein-Milman の定理より、バナッハ空間の共役空間の閉単位球は、十分たくさんの端点を持つことが知られている。ここでは、$\mathcal{D}(\delta)^*$ の閉単位球の端点の形を調べる。

任意の K の元 x に対して $\eta_x, \eta'_x\in\mathcal{D}(\delta)^*$ を 次のように定義する。

$$\eta_x(f):=f(x)\quad(f\in\mathcal{D}(\delta)),$$

$$\eta'_x(f):=\delta(f)(x)\quad(f\in\mathcal{D}(\delta)).$$

$\eta_x\in\mathcal{D}(\delta)^*$ のノルムは、1 である。$\mathcal{R}(\delta)=C(K)$ ならば、$\eta'_x\in\mathcal{D}(\delta)^*$ のノルム も、1 である。

定理 3． K を 第一可算公理を満たすコンパクト ハウスドルフ空間とし、δ は $C(K)$ における非有界閉 $*$-微分で $\mathcal{R}(\delta)=C(K)$ であるとする。$\mathcal{D}(\delta)^*$ の元 F が $\mathcal{D}(\delta)^*_1$ の端点ならば、$x\in K$ と $\theta\in(-\pi,\pi]$ が存在し

$$F=e^{i\theta}\eta_x\quad \text{または}\quad F=e^{i\theta}\eta'_x$$

である。また、逆も成り立つ。

この定理は、次の3つの補題から得られる。

補題 4. K を コンパクト ハウスドルフ空間とし、δ を $C(K)$ における非有界閉 $*$-微分とする。$\mathcal{D}(\delta)^*$ の元 F が $\mathcal{D}(\delta)^*_1$ の端点ならば、$x \in K$ と $\theta \in (-\pi, \pi]$ が存在し

$$F = e^{i\theta}\eta_x \quad \text{または} \quad F = e^{i\theta}\eta'_x$$

である。

補題 5. K を 第一可算公理を満たすコンパクト ハウスドルフ空間とし、δ を $C(K)$ における非有界閉 $*$-微分とする。任意の $x \in K$ と $\theta \in (-\pi, \pi]$ に対し、$F := e^{i\theta}\eta_x$ と定義すれば、$F \in \mathcal{D}(\delta)^*$ は $\mathcal{D}(\delta)^*_1$ の端点である。

補題 6. K を 第一可算公理を満たすコンパクト ハウスドルフ空間とし、δ は $C(K)$ における非有界閉 $*$-微分で $\mathcal{R}(\delta) = C(K)$ であるとする。任意の $x \in K$ と $\theta \in (-\pi, \pi]$ に対し、$F := e^{i\theta}\eta'_x$ と定義すれば、$F \in \mathcal{D}(\delta)^*$ は $\mathcal{D}(\delta)^*_1$ の端点である。

§5. 非有界 $*$-微分の定義域上の線形等長作用素

上への線形等長作用素は、共役空間の閉単位球の端点全体を 閉単位球の端点全体に写すので、定理3を用いて、次の結果を得た。

定理 7. K_1, K_2 を 第一可算公理を満たす 連結なコンパクト ハウスドルフ空間とし、δ_1 と δ_2 を、それぞれ $C(K_1)$ と $C(K_2)$ の非有界閉 $*$-微分とする。T を $\mathcal{D}(\delta_1)$ から $\mathcal{D}(\delta_2)$ の上への 線形等長作用素 とすると、K_2 から K_1 の上への 同相写像 τ

と 絶対値が常に 1 である $w \in \mathcal{D}(\delta_2)$ が存在し、

$$T(f)(y) = w(y)f(\tau(y)) \qquad (\forall f \in \mathcal{D}(\delta_1), \forall y \in K_2).$$

注 $\mathcal{D}(\delta_1)$ から $\mathcal{D}(\delta_2)$ の上への 線形等長作用素が 存在するのは、$\delta_i = 0$ $(i = 1, 2)$ の場合か、$\delta_i \neq 0$ $(i = 1, 2)$ の場合である。

定理 8. K_1, K_2 を 第一可算公理を満たす コンパクト ハウスドルフ空間とし、δ_1, δ_2 を、それぞれ $\mathcal{R}(\delta_1) = C(K_1)$, $\mathcal{R}(\delta_2) = C(K_2)$ である $C(K_1)$, $C(K_2)$ における非有界閉 $*$-微分とすると、次の (1), (2) が成り立つ。

(1) T を $\mathcal{D}(\delta_1)$ から $\mathcal{D}(\delta_2)$ の上への 線形等長作用素 とすると、次のことがいえる。

(i) K_2 から K_1 の上への 同相写像 τ, 絶対値が常に 1 である $w \in Ker(\delta_2)$, $\delta_1(f_0) = 1$ となる $f_0 \in \mathcal{D}(\delta_1)$ が存在し、

$$T(f)(y) = w(y)f(\tau(y)) \qquad (\forall f \in \mathcal{D}(\delta_1), \forall y \in K_2),$$

$$\delta_2(T(f))(y) = w(y)\delta_2(f_0 \circ \tau)(y)\delta_1(f)(\tau(y)) \qquad (\forall f \in \mathcal{D}(\delta_1), \forall y \in K_2).$$

(ii) $T(Ker(\delta_1)) = Ker(\delta_2)$.

(2) (i) $|w(y)| = 1$ ($\forall y \in K_2$), (ii) $\tau :$ K_2 から K_1 の上への同相写像, (iii) $\forall f \in \mathcal{D}(\delta_1)$ に対して $f \circ \tau \in \mathcal{D}(\delta_2)$, (iv) $\forall g \in \mathcal{D}(\delta_2)$ に対して $g \circ \tau \in \mathcal{D}(\delta_1)$, (iv) $\forall y \in K_2$ に対して $|\delta_2(f \circ \tau)(y)| = |\delta_1(f)(\tau(y))|$, を満たす 任意の $w \in Ker(\delta_2)$ とτ で、T を次のように定義すると、T は、$\mathcal{D}(\delta_2)$ から $\mathcal{D}(\delta_1)$ の上への 線形等長作用素 である。

$$T(f)(y) := w(y)f(\tau)(y) \qquad (\forall f \in \mathcal{D}(\delta_1), \forall y \in K_2).$$

定理 8 において、δ が、d/dt の拡張である $C([0,1])$ における 非有界閉 $*$-微分の場合 (すなわち、$C^{(1)}([0,1]) \subset \mathcal{D}(\delta)$, $f \in C^{(1)}([0,1])$ に対して、$\delta(f) = f'$) を 考えると、さらに 詳しい τ と w の特徴付けが、可能となる。

$[0,1]$ 上の実数値関数 Φ が一般化されたカントール関数 (GCF) であるというのは、Φ が $[0,1]$ 上で単調で、$[0,1]$ のどんな区間上でも、狭義単調ではないときにいう。よって、GCF である Φ に対して、互いに素で空でない開区間の集合族 $\{I_k\}$ が存在し、Φ は 各々の I_k 上で定数で、$\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ は $[0,1]$ で稠密である。

$[0,1]$ 上の恒等写像を id とする。

系 9. δ を、d/dt の拡張である $C([0,1])$ における 非有界閉 $*$-微分とすると、次の (1), (2) が、成り立つ。

(1) T を $\mathcal{D}(\delta)$ から $\mathcal{D}(\delta)$ の上への 線形等長作用素 とすると、(i) $|w(x)| = 1$ ($\forall x \in [0,1]$), (ii) $\tau := id + \tau_0$ が、$[0,1]$ 上の同相写像, (iii) $\tau^{-1} = id + \rho_0$, $\tau_0(0) = \tau_0(1) = \rho_0(0) = \rho_0(1) = 0$, を満たす τ_0, ρ_0, $w \in Ker(\delta)$ が存在し、

$$T(f)(x) = w(x) f \circ (id + \tau_0)(x) \qquad (\forall f \in \mathcal{D}(\delta), \forall x \in [0,1])$$

または

$$T(f)(x) = w(x) f \circ (1 - (id + \tau_0))(x) \qquad (\forall f \in \mathcal{D}(\delta), \forall x \in [0,1]).$$

(2) (i) $|w(x)| = 1$ ($\forall x \in [0,1]$), (ii) $\tau := id + \tau_0$: $[0,1]$ 上の同相写像, (iii) $\forall f \in Ker(\delta)$ に対して、$f \circ \tau$, $f \circ \tau^{-1} \in \mathcal{D}(\delta)$, を満たす 任意の w, $\tau_0 \in Ker(\delta)$ で、T_1 と T_2 を次のように定義すると、T_1, T_2 は、$\mathcal{D}(\delta)$ から $\mathcal{D}(\delta)$ の上への 線形等長作

用素 である。

$$T_1(f)(x) := w(x) f \circ (id + \tau_0)(x) \qquad (\forall f \in \mathcal{D}(\delta), \forall x \in [\,0,1\,]),$$

$$T_2(f)(x) := w(x) f \circ (1 - (id + \tau_0))(x) \qquad (\forall f \in \mathcal{D}(\delta), \forall x \in [\,0,1\,]).$$

系 1 0． T を $C^{(1)}([\,0,1\,])$ から それ自身の上への 線形等長作用素 とすると、

$$T(f)(x) = e^{i\theta} f(\tau(x)) \qquad (\forall f \in C^{(1)}[\,0,1\,], \forall x \in [\,0,1\,]).$$

ただし、$e^{i\theta} = T(1)$ $(\theta \in (-\pi, \pi])$ (定数) であり、$\tau = id$ または $\tau = 1 - id$ $(id(x) = x : x \in [\,0,1\,])$ である。

§6. 非有界閉 $*$-微分の定義域上の合成作用素

非有界閉 $*$-微分の定義域上の線形等長作用素は、荷重合成作用素の特別な形であることが わかった。そこで、まず、合成作用素について考えていくことにする。ここでは、特に、非有界閉 $*$-微分の定義域上の合成作用素の コンパクト性について、議論する。(同値なノルムの、どのノルムでも良い。) H. Kamowitz[11] により $C^{(1)}([\,0,1\,])$ 上では 調べられている。

K_1, K_2 を、コンパクト ハウスドルフ空間 とし、δ_i $(i = 1,2)$ を $C(K_i)$ における非有界閉 $*$-微分とする。φ を K_2 から K_1 への連続写像とする。C_φ を、次のように定義し、合成作用素 と 呼ぶ。

$$C_\varphi(f) := f \circ \varphi \qquad (\forall f \in \mathcal{D}(\delta_1))$$

尚、φ は、C_φ が $\mathcal{D}(\delta_1)$ から $\mathcal{D}(\delta_2)$ への作用素になるように設定してから、議論をはじめる。閉グラフの定理より、C_φ は有界作用素である。

定理 1 1. C_φ が $\mathcal{D}(\delta_1)$ から $\mathcal{D}(\delta_2)$ への 弱コンパクト作用素（即ち、$C_\varphi(\mathcal{D}(\delta_1)_1)$ が 弱相対コンパクト）ならば、$\mathcal{R}(C_\varphi) \subset Ker(\delta_2)$ である。特に、$Ker(\delta_2) = \mathbb{C}1$ ならば、φ は constant である。（即ち、φ は K_2を 一点に写す。）

参考文献

[1] C. J. K. Batty, *Unbounded derivations of commutative C^*-algebras*, Comm. Math. Phys., 61(1978), pp.261–266.

[2] C. J. K. Batty, *Derivations on compact spaces*, Proc. London Math. Soc., (3) 42(1981), pp.299–330.

[3] O. Bratteli and D. Robinson, *Unbounded derivations of C^*-algebras*, Comm. Math. Phys., 42(1975), pp.253–268.

[4] ———, *Unbounded derivations of C^*-algebras II*, Comm. Math. Phys., 46(1976), pp.11–30.

[5] ———, *Operator algebras and statistical mechanics*, Vol. I, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.

[6] M. Cambern, *Isometries of certain Banach algebras*, Studia Math.,25(1965), pp.217–225.

[7] M. Cambern and J. T. Pathak, *Isometries of spaces of differentiable functions*, Math. Japonica., 26(1981), pp.253–260.

[8] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators Part I : General Theory*, Interscience, New York, 1958.

[9] F. M. Goodman, *Closed derivations in commutative C^*-algebras*, J. Funct. Anal., 39(1980), pp.308–346.

[10] K. Jarosz and V. D. Pathak, *Isometry between function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 305(1988), pp.193–206.

[11] H. Kamowitz, *Compact endomorphisms of Banach algebras*, Pacific J. Math. 89(1980), pp.313–325.

[12] ———, *Compact weighted endomorphisms of* $C(X)$, Proc. Amer. Math. Soc., 83(1981), pp.517–521.

[13] H. Kurose, *An example of a non quasi-well behaved derivations in* $C(I)$, J. Funct. Anal., 43(1981), pp.193–201.

[14] ———, *Closed derivations in* $C(I)$, Tôhoku Math. J., 35(1983), pp.341–347.

[15] K. de Leeuw, *Banach spaces of Lipschitz functions*, Studia Math., 21(1961), pp.55–66.

[16] A. McIntosh, *Functions and derivations of* C^**-algebras*, J. Funct. Anal., 30(1978), pp.264–275.

[17] S. Ōta, *Certain operator algebras induced by* $*$*-derivations in* C^**-algebras on an indefinite inner product space*, J. Functional Analysis, 30(1978), pp.238–244.

[18] ———, *Closed derivation in* C^**-algebras* , Math. Ann., 257(1981), pp.239–250.

[19] N. V. Rao and A. K. Roy, *Linear isometries of some function spaces*, Pacific J. Math., 38(1971), pp.177–192.

[20] A. K. Roy, *Extreme points and linear isometries of the Banach space of Lipschitz functions*, Canad. J. Math., 20(1968), pp.1150–1164.

[21] S. Sakai, *The theory of unbounded derivations in* C^**-algebra*, Lecture notes, Univ. of Copenhagen and Newcastle upon Tyne, 1977.

[22] ———, *Operator algebras in dynamical systems : The theory of unbounded derivations in* C^**-algebras*, Cambridge university press, Cambridge, 1991.

[23] H. Takagi, *Compact weighted composition operators on function algebras*, Tokyo J. Math., 11(1988), pp.119–129.

[24] K.W.Tam, *Isometries of certain function spaces*, Pacific J. Math., 31(1969), pp.233–246.

[25] J. Tomiyama, *The theory of closed derivations in the algebra of continuous functions on the unit interval*, Institute of Mathematics National Tsing Hua University, 1983.